三条市立大学　令和５年度
工学部　技術・経営工学科
一般選抜　**前**期日程

個別学力検査

数学　解答編

令和５年２月25日　　10時～12時（120分）

1 ＜解答例＞

（１）関数 $f(x)$ を微分すると，

$$f'(x) = 4x^2(x-3)$$

極値を持つための条件 $f'(x) = 0$ より

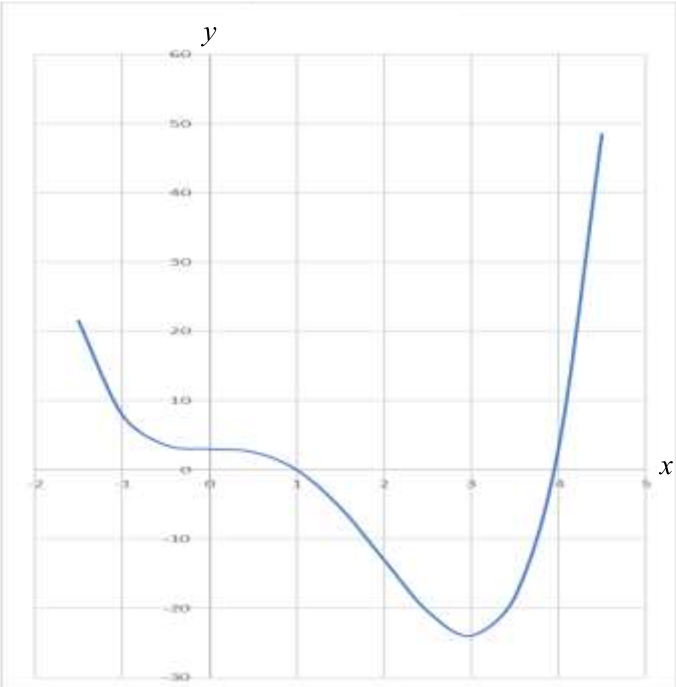
$$x = 0, 3$$

したがって，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↘	0	↘	-24	↗

$x = 3$ のとき極小で，極小値は -24 である。

以上から，$f(x)$ のグラフは下のようになる。



（２）曲線に対する接線の方程式は、２つの接点の x 座標をα とβ $(\alpha<\beta)$とすると、次のように表される。

$$f(x)-(ax+b)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

整理すると

$$x^4-4x^3+3-(ax+b)$$
$$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$$

恒等式であるから左辺と右辺の係数を比較して

$$-4=-2(\alpha+\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
$$0=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$
$$-a=-2\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$
$$3-b=\alpha^2\beta^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

これより a と b の値を求めると，②より

$$\alpha+\beta=2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

③、⑥より

$$\alpha\beta=-2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥、⑦を④に代入して

$$a=2\alpha\beta(\alpha+\beta)=-8$$

⑤、⑦より

$$b=3-\alpha^2\beta^2=-1$$

よって接線の方程式は

$$y=-8x-1$$

（３）関数 $f(x)$ と直線 l の接点の座標を求める。

２つの接点の x 座標 α とβ について、$\alpha+\beta=2$、$\alpha\beta=-2$ が成り立っている。これらから、α とβ は方程式$(t-\alpha)(t-\beta)=0$ の解すなわち$t^2-2t-2=0$ の解である。

よって

$$t=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times(-2)}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

いま、$\alpha<\beta$ であるから、

$$\alpha=1-\sqrt{3},\quad \beta=1+\sqrt{3}$$

接点の y 座標は，接線の方程式$y=-8x-1$ に x 座標α とβをそれぞれ代入すれば，

$x=1-\sqrt{3}$ の時，

$$y=-9+8\sqrt{3}$$

$x=1+\sqrt{3}$ の時，

$$y=-9-8\sqrt{3}$$

よって接点の座標は，

$$(1-\sqrt{3},\quad -9+8\sqrt{3})$$
$$(1+\sqrt{3},\quad -9-8\sqrt{3})$$

2 ＜解答例＞

（１）点 B の x 座標および y 座標は問題図より

$$\left.\begin{array}{l} x=b\cos\theta \text{ または } (l-a)\cos\theta \\ y=l\sin\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

同様に点 M の x 座標および y 座標は

$$\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{a}{2}\cos\theta \\ y=\dfrac{a}{2}\sin\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

（２）点 B の描く軌跡は，前問(1)の式①より θ を消去して得られる。すなわち，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の関係より B 点の描く軌跡の方程式は

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{l}\right)^2=1 \quad \text{または} \quad \left(\frac{x}{l-a}\right)^2+\left(\frac{y}{l}\right)^2=1$$

これは，原点を中心とする，x 軸方向に短軸長さ $2b$，y 軸方向に長軸長さ $2l$ を持つ楕円形である。

同様に点Mの描く軌跡の方程式は前問（1）の式②より θ を消去して

$$x^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

これは原点を中心とする半径 $\dfrac{a}{2}$ の円である。

$\boxed{3}$ ＜解答例＞

（1）$\mathrm{AB} \perp \mathrm{CD}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 0, -2)$ ，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (3t-2, t+1,\ -1)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = -2 \cdot (3t-2) + 2 = 0$$

よって，$t = 1$

$\boxed{ア}$：1

（2）平面 T の方程式 $ax + by + cz + d = 0$ に 3 点の座標を代入すると，

$$\begin{cases} 3a - b + 2c + d = 0 \\ a - b + d = 0 \\ 2a + 3c + d = 0 \end{cases}$$

これら 3 式から，$a = d$，$b = 2d$，$c = -d$ が導かれるので，方程式は，

$$dx + 2dy - dz + d = 0$$

a，b，c のうち少なくとも 1 つは 0 ではないから，$d \neq 0$となり，よって平面 T の方程式は

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

$\boxed{イ}$：１，　$\boxed{ウ}$：２，　$\boxed{エ}$：－１，　$\boxed{オ}$：１

（3）$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 0, -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 1,\ 1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ である。すなわち，$\triangle \mathrm{ABC}$ は $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{R}$ の直角三角形である。
点 A，点 Bおよび点 C の座標から辺 AB ，辺 AC の長さはそれぞれ $2\sqrt{2}$ ，$\sqrt{3}$である。したがって，$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$\boxed{カ}$：$\sqrt{6}$

（4）$t = 3$ のとき，点 D の座標は $\mathrm{D}\,(9, 4, 2)$ である。原点の座標を $\mathrm{O}\,(0, 0, 0)$ とする。
前問（3）より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 0, -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1,\ 1,\ 1)$ である。4 点 A，B，C，H は平面 T 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を実数 m，n を用いて表すと，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= (-2m - n + 3, n - 1, -2m + n + 2) \end{aligned}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = (-2m - n - 6, n - 5, -2m + n)$$

$\boxed{キ}$：$-2m-n-6$，　$\boxed{ク}$：$n-5$，　$\boxed{ケ}$：$-2m+n$

いま，$\overrightarrow{DH}\perp T$ となるには，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC}$，すなわち$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ となればよい。

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=-2\times(-2m-n-6)-2(-2m+n)=0$$
$$m=-\frac{3}{2}$$

$\boxed{コ}$：$-\frac{3}{2}$

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=-1\times(-2m-n-6)+(n-5)+(-2m+n)=0$$
$$n=-\frac{1}{3}$$

$\boxed{サ}$：$-\frac{1}{3}$

よって，

$$\overrightarrow{OH}=\left(3+\frac{1}{3}+3,\ -\frac{1}{3}-1,\ 3-\frac{1}{3}+2\right)=\left(\frac{19}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{14}{3}\right),$$

すなわち点 H の座標は H $\left(\frac{19}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{14}{3}\right)$ となる。

$\boxed{シ}$：$\frac{19}{3}$，　$\boxed{ス}$：$-\frac{4}{3}$，　$\boxed{セ}$：$\frac{14}{3}$

線分 DH の長さ l は，

$$l=\left|\overrightarrow{DH}\right|=\sqrt{\left(3+\frac{1}{3}-6\right)^2+\left(-\frac{1}{3}-5\right)^2+\left(3-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$

$\boxed{ソ}$：$\frac{8\sqrt{6}}{3}$

$\boxed{4}$ ＜解答例＞

（１）任意の定数を α とするとき曲線 $f(x)=\cos x$ 上の点$(\alpha, \cos\alpha)$における接線の傾き m は

$$m=f'(\alpha)=-\sin\alpha$$

である。一方，同じ点における法線の傾き m' は，接線と直交するから垂直条件 $mm'=-1$ より

$$m'=\frac{1}{\sin\alpha}(=\mathrm{cosec}\,\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

である。ところで，法線上の任意点の座標を（x, y）とすると，法線の傾きは

$$m'=\frac{y-\cos\alpha}{x-\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

と表すことができる。式①，②より

$$\frac{y-\cos\alpha}{x-\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$$

よって法線の方程式は

$$y=\frac{1}{\sin\alpha}(x-\alpha)+\cos\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

（２）曲線 $f(x)$から法線方向に等距離 d にある点，すなわち平行曲線上の点は，点$(\alpha, \cos\alpha)$を中心とする半径 d の円と法線の交点で与えられる。このことから，次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{\sin\alpha}(x-\alpha)+\cos\alpha & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①} \\ (x-\alpha)^2+(y-\cos\alpha)^2=d^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

式①を式②に代入して x について解くと

$$x=\alpha\pm\frac{d\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$$　（＋は y 軸正側の点，－は y 軸負側の点）

同様に式②を式①に代入して y について解くと

$$y=\cos\alpha\pm\frac{d}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$$　（＋は y 軸正側の点，－は y 軸負側の点）

以上から，$y=\cos\alpha$ に対する平行曲線上にある点の座標は

$$x=\alpha\pm\frac{d\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}} \qquad y=\cos\alpha\pm\frac{d}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$$

（$0<\alpha<\pi$，複号同順，＋は y 軸正側の点，－は y 軸負側の点）