三条市立大学　令和６年度
工学部　技術・経営工学科
一般選抜　前期日程

個別学力検査

数学　解答編

令和６年　２月２５日　　10時～12時（120分）

1

（1）外側の球 B_1 の半径を求めよ。

△ABH≡△ACH≡△ADH（∵直角三角形で斜辺が等しく a であり他の一辺 AH が共通）であることから，H は正三角形 BCD の外心（各辺の垂直二等分線の交点）かつ内心（角の二等分線の交点）かつ重心（中線の交点）である。

これより，△APH について

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{PH}^2}$$

$$\mathrm{AP}=a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad (\because \text{題意から面は正三角形である})$$

$$\mathrm{PH}=\frac{1}{3}\mathrm{DP}=\frac{1}{3}\mathrm{AP}=\frac{\sqrt{3}}{6}a \quad (\because \text{H は重心で PH は DP 上にある})$$

$$\mathrm{DP}=\mathrm{AP} \quad (\because \text{一辺}a\text{の正三角形の中線})$$

よって

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{36}a^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a \quad \cdots\cdots ①$$

次に△ACH について考える。AH 上の点 O を正四面体の各頂点に外接する球 B_1 の中心とすると，OC は外接球の半径であり，また，OC=AO となる。

これより，球 B_1 の半径 OC(=AO)を r_1 として△OCH について三平方の定理を適用すると，

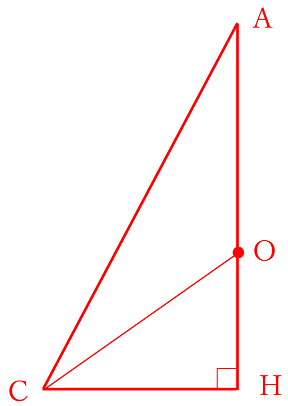
$$\mathrm{CH}^2+(\mathrm{AH}-r_1)^2={r_1}^2 \quad \cdots\cdots ②$$

$\mathrm{CH}=\frac{2}{3}\mathrm{DP}=\frac{2}{3}\mathrm{AP}=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a$（∵H は重心）および式①より式②は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a-r_1\right)^2={r_1}^2$$

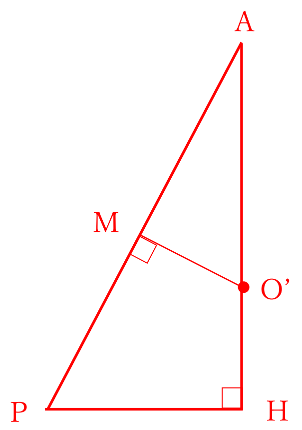
これを r_1 について解いて

$$r_1=\mathrm{AO}=\sqrt{\frac{3}{8}}a \quad ■$$



（2）内側の球 B_2 の半径を求めよ。

△APH について考える。点 O'から線分 AP におろした垂線の足を M とする。線分 O'M が内接する球 B_2 の半径であり r_2 とする。



2 つの三角形△APH，△A O'M について対応する 2 組の角がそれぞれ等しいので△APH∽△A O'M である。よって，

$$\mathrm{AO}':\mathrm{AP}=\mathrm{O}'\mathrm{M}:\mathrm{PH}$$
$$(\mathrm{AH}-r_2):\frac{\sqrt{3}}{2}a=r_2:\frac{\sqrt{3}}{6}a$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}ar_2=\frac{\sqrt{3}}{6}a\mathrm{AH}-\frac{\sqrt{3}}{6}ar_2$$

これを r_2 について解くと

$$r_2=\frac{12}{8}\times\frac{1}{6}\mathrm{AH}=\frac{1}{4}\mathrm{AH}$$

よって前問の式①より

$$r_2=\mathrm{O}'\mathrm{M}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a \quad ■$$

（3）中心点 O と中心点 O'の関係を述べよ。

AO'の長さを求めると，△APH∽△AO'M だから，

AO'：AP＝O'M：PH

これより

AO'＝O'M×AP／PH

前問（2）の結果より

$$\mathrm{AO}'=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\div\frac{\sqrt{3}}{6}a=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a=\sqrt{\frac{3}{8}}a=\mathrm{AO}$$

よって，中心点 O と中心点 O'は一致する。 ■

$\boxed{2}$

（1）球面Sと直線lの２つの交点CおよびDの座標を求めよ。

球面Sと直線lの交点をＱとおく。点Ｑは直線l上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$で，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = k\vec{v}$と表せる。したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + k\vec{v} = (k, -2+k, -3+2k)$$

一方, 交点Ｑは球面S上にあるから, その座標値を球面Ｓを表す方程式 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$に代入してよいから,

$$(k-1)^2 + (-2+k+1)^2 + (-3+2k-2)^2 = 9$$

$$\therefore k = 1,\ 3$$

$k = 1$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1, -1, -1)$

$k = 3$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (3,1,3)$

よって，交点の座標はC$(1, -1, -1)$およびD$(3,1,3)$　■

（2）３点O，C，Dを含む平面Pと球面Sの交線が作る円の半径を求めよ。

球面 S の中心$\mathrm{A}(1,-1,2)$から３点$\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{C}(1,-1,-1)$，$\mathrm{D}(3,1,3)$を含む平面 P に垂線を下し，その交点を H とすると，点 H は平面 P と球面 S の交線が作る円の中心と一致する。また，球の中心 A から交線の成す円の外周までの長さは球面 S の半径と同じであり，題意より 3 である。これより三平方の定理から線分 AH の長さが分かれば，円の半径 r を求めることができる。

まず H の座標を求める。点 H は平面 P 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=a\overrightarrow{\mathrm{OC}}+b\overrightarrow{\mathrm{OD}}$と表せるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=a\overrightarrow{\mathrm{OC}}+b\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(a+3b,-a+b,-a+3b)$$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$$

を満たす。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a+3b-1,-a+b+1,-a+3b-2)$だから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$より

$$\therefore 3a-b=0 \quad \cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$より

$$\therefore -a+19b-8=0 \quad \cdots②$$

式①と式②を連立してaおよびbを求めると，

$$a=\frac{1}{7},\qquad b=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

以上から，点 A からおろした垂線の足の点 H の座標は，

$$\mathrm{H}\left(\frac{10}{7},\frac{2}{7},\frac{8}{7}\right)$$

次に，垂線 AH の長さdはベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$の大きさであるから，

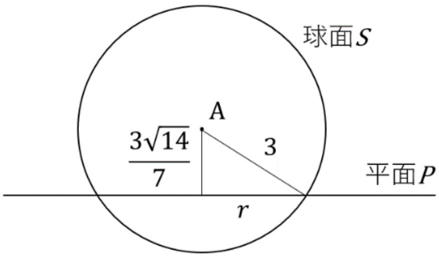
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{3}{7},\frac{9}{7},-\frac{6}{7}\right)$$
$$d=\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\frac{3\sqrt{14}}{7}$$

以上から，交線が作る円の半径rは，三平方の定理より（右図），

$$r^2+d^2=r^2+\left(\frac{3\sqrt{14}}{7}\right)^2=3^2$$

$r\geqq 0$だから，

$$r=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{35}}{7} \qquad ■$$



$\boxed{3}$

（1）三角形の外接円の方程式を求めよ。

三角形は直角三角形であるから，外接円の中心は斜辺の中点$(0,0)$である。また，斜辺の長さは三平方の定理より$2\sqrt{a^2+b^2}$である。半径はその半分である。以上から，外接円の方程式は次式となる。

$$x^2+y^2=a^2+b^2 \quad ■$$

（2）下図に示す直線 m と三角形の外接円で囲まれた半月型の面積 S_1 を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

直線 m と外接円で囲まれた面積の回転体の体積 v_1 を求めると

$$v_1=\pi\int_{-a}^{a}\left\{\left(\sqrt{a^2+b^2-x^2}\right)^2-b^2\right\}dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}(a^2-x^2)\ dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3 \qquad \cdots \text{上辺を直径（半径}a\text{）とする球の体積に同じ。} \quad ■$$

（3）下図に示す直線 n と三角形の外接円で囲まれた半月型の面積 S_2 を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

直線 n と外接円で囲まれた面積の回転体の体積 v_2 を求めると

$$v_2=\pi\int_{-b}^{b}\left\{\left(\sqrt{a^2+b^2-y^2}\right)^2-a^2\right\}dy$$

$$=2\pi\int_{0}^{b}(b^2-y^2)\ dy$$

$$=\frac{4}{3}\pi b^3 \quad \cdots y\text{方向の辺を直径（半径}b\text{）とする球の体積に同じ。} \quad ■$$