三条市立大学　令和６年度
工学部　技術・経営工学科
一般選抜　中期日程

個別学力検査

数学　解答編

令和６年３月８日　　10 時～12 時（120 分）

$\boxed{1}$

（1）三角錐 ACFH の体積を求めよ。

三角錐 ACFH の体積は直方体から三角錐 GCFH・BACF・DACH・EAFH の体積を引いたものに他ならない。また，それら 4 つの三角錐の体積は底面積と高さが同じ三角錐だからみな同じである。

そこで，1 つの三角錐 GCFH の体積 v を求めると

$$v = \frac{1}{3}c \cdot \frac{1}{2}ab = \frac{1}{6}abc$$

よって，三角錐 ACFH の体積 V は

$$V = abc - 4v = abc - 4 \times \frac{1}{6}abc$$

$$V = \frac{1}{3}abc \quad ■$$

（2）点 C と直線 FH の距離を求めよ。

頂点 C から辺 FH におろした垂線の長さが点 C と直線 FH の距離である。

垂線の足を M として，右図のように△CHF について，頂点 C からおろした垂線の長さ y，FM＝x とする。

直角三角形△CMF について，三平方の定理より

$$x^2 + y^2 = b^2 + c^2 \qquad \cdots ①$$

同様に直角三角形△CMH について三平方の定理より

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2} - x\right)^2 + y^2 = a^2 + c^2 \qquad \cdots ②$$

式①，②より y を求めると，式②より $x = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ だから，

$$y^2 = b^2 + c^2 - x^2$$

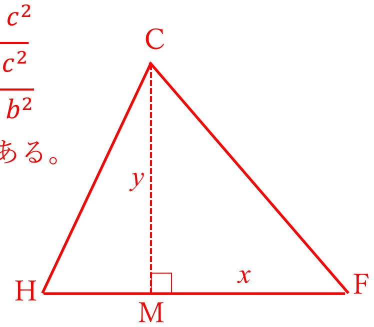
$$\therefore y = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2 + b^2}} \quad ■$$

$\mathrm{CH} = \sqrt{a^2 + c^2}$

$\mathrm{CF} = \sqrt{b^2 + c^2}$

$\mathrm{FH} = \sqrt{a^2 + b^2}$

である。



（3）三角形 CFH の面積を求めよ。

三角形の面積 S は$S = \frac{1}{2}\mathrm{FH} \cdot y$だから，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \quad ■$$

（4）点 A から三角形 CFH に下した垂線の長さを求めよ。

点 A から三角形 CFH に下した垂線の長さを h とすると三角錐 ACFH の体積は次式で表される。

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

よって，$h = \frac{3V}{S}$より

$$h = \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}} \quad ■$$

$\boxed{2}$

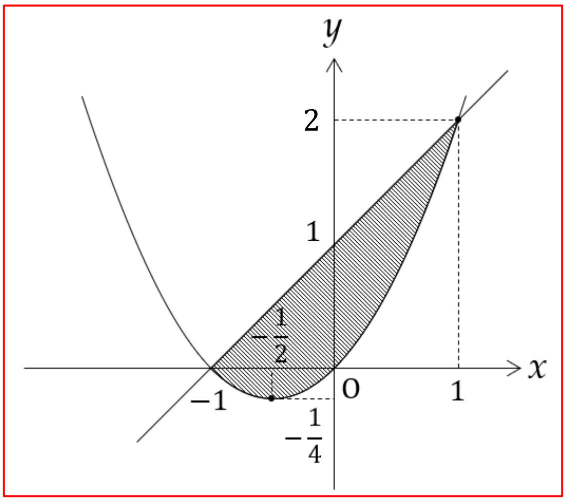
（１）$a=1$のときの領域を S とする。領域 S を図示せよ。

$a=1$のとき，与えられた連立不等式は次のようになる。

$$\begin{cases} y \geqq x^2+x=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} \\ y \leqq x+1 \end{cases}$$

境界線の交点は $x^2+x=x+1$ より(1,2)と(-1,0)。

よって，領域Sは下図の境界を含む斜線の通り。　■



（２）点(x,y)が領域Aを動くとき，$x+y$の最大値と最小値を求めよ。

$f(x)=ax^2+x$，$g(x)=x+a$とおく。まず$f(x)$と$g(x)$の交点の座標を求めるとx座標は$f(x)=g(x)$より，

$$ax^2+x=x+a$$
$$ax^2-a=0$$
$$a(x+1)(x-1)=0$$
$$x=\pm 1$$

よって，交点の座標を P，Q とすると，点 P$(1,\ a+1)$および点 Q$(-1,\ a-1)$となる。

次に，$x+y$の最大値と最小値を求めるため $x+y=m$とおき，まず，直線 l: $y=-x+m$と放物線$y=f(x)$との接点の座標を求める。$ax^2+x=-x+m$より

$$ax^2+2x-m=0$$

を得る。接するときは上の式が重解を持つから判別式$D=0$より，$2^2-4\times a\times(-m)=0$

$$\therefore m=-\frac{1}{a}$$

よって，このときの接点の座標 R は，R$(-\frac{1}{a},\ 0)$となる。

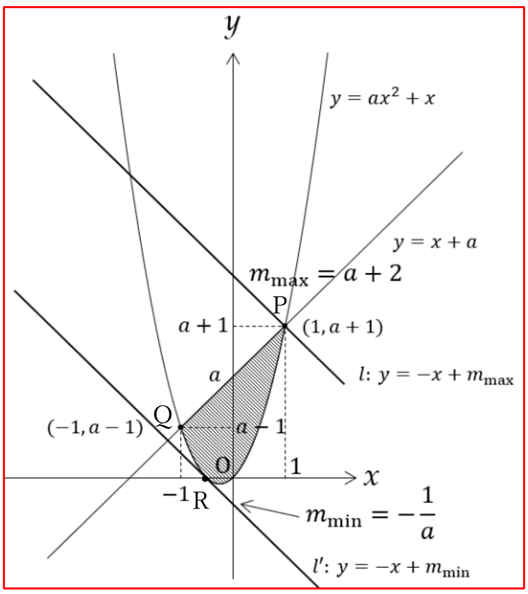
さて，下図による検討より，m の最大値については直線 l が交点 P を通るときであるが，最小値は接点 R が交点 Q より右側にある場合には l が接点 R を通るとき，接点 R が左側にある場合には交点 Q を通るとき，m は最小値となる。

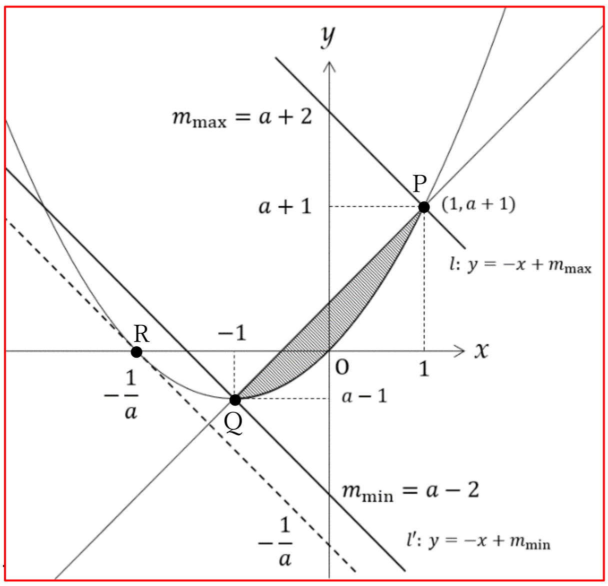
以上から，$x+y\ (=m)$の最大値は，l が交点$P(1,a+1)$を通るときである。また最小値は$-\frac{1}{a}\geqq -1$すなわち$a\geqq 1$の場合は接点R$(-\frac{1}{a},\ 0)$を通るとき，$0<a<1$の場合は交点 Q$(-1,\ a-1)$を通るときである（下図）。よって m の最大値および最小値は，

m の最大値：$m=a+2$

$$m\text{の最小値：}m=\begin{cases}-\frac{1}{a} & (a\geqq 1\text{ のとき})\\ a-2 & (0<a<1\text{ のとき})\end{cases}$$

■





3

（１）接線 l の方程式を求めよ。

$f'(x) = ae^{ax}$だから，接線の方程式の公式$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$より

$$y = ae^{ac}(x - c) + e^{ac} = ae^{ac}x + (1 - ac)e^{ac} \quad ■$$

（２）法線 m の方程式を求めよ。

$f'(x) = ae^{ax}$だから，法線の方程式の公式$y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$より

$$y = -\frac{1}{ae^{ac}}(x - c) + e^{ac} = -\frac{1}{ae^{ac}}x + e^{ac} + \frac{c}{ae^{ac}} \quad ■$$

（３）三角形の面積 S を求めよ。

接線 l の x 切片は y=0 より

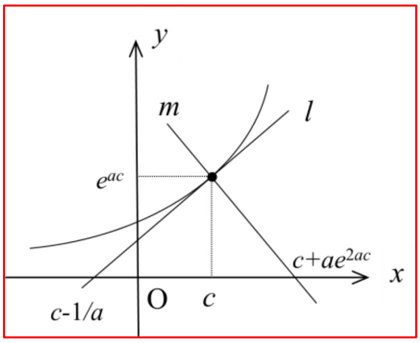
$$x = c - \frac{1}{a}$$

法線 m の x 切片は y=0 より

$$x = c + ae^{2ac}$$

よって，三角形の面積 S は（右図参照）

$$\therefore S = \frac{e^{ac}}{2}\left(\frac{1}{a} + ae^{2ac}\right) \quad ■$$



（４）$c = 0$における三角形の面積が最大あるいは最小になるときの a の値および最大あるいは最小値 S_0 を求めよ。

前問（3）より$c = 0$のときの三角形の面積は

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + a\right)$$

極値を求めるために S を a で微分すると

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2} + 1\right) \quad \cdots\cdots\cdot ①$$

さらにそれを 0 とおく。

$$\therefore a = 1 \ (\because a > 0) \quad ■$$

式①より$a = 1$の前後で傾きは負から正になるから$a = 1$で最小値を取り，$S_0 = 1$ ■

※相加平均と相乗平均の大小関係を用いて解くこともできる。