三条市立大学　令和７年度
工学部　技術・経営工学科
一般選抜　前期日程

個別学力検査

数学　解答編

令和７年２月 25 日　　10 時～12 時（120 分）

$\boxed{1}$

直交するx軸，y軸で構成される座標平面上の図形について，下記の問いに答えよ。

（1）　点 A$(1, 2)$ と点 B$(4, 6)$ を結ぶ直線 AB の方程式を求めよ。

（解答例）

点 A$(1, 2)$ と点 B$(4, 6)$ を通る直線の方程式を求める。まず，直線の傾きを求める。直線 AB の傾きを m とすると

$$\mathrm{m} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$$

直線は点 A$(1, 2)$ を通るので，傾き m を使って直線の方程式を求める。

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x-1)$$

これを整理すると，直線 AB の式は以下となる。

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

（2）点 C$(3, -1)$を中心とし，半径 3 の円の方程式を求めよ。

（解答例）

点 C$(3, -1)$を中心とし，半径が 3 の円の方程式は次のようになる。

$$(x-3)^2 + (y-(-1))^2 = 3^2$$

これを整理すると，円 C の式は以下となる。

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9 \quad \blacksquare$$

（3）直線 AB と円 C が交わらないことを証明せよ（作図での証明は行わないこと）。

（解答例）

直線 AB の方程式を円 C の方程式に代入する。

$$(x-3)^2 + (\frac{4}{3}x + \frac{2}{3} + 1)^2 = 9$$

これを整理すると，

$$(x-3)^2 + (\frac{4}{3}x + \frac{5}{3})^2 = 9$$

さらに展開して整理する。

$$x^2 - 6x + 9 + \frac{16}{9}x^2 + \frac{40}{9}x + \frac{25}{9} = 9$$
$$9x^2 - 54x + 81 + 16x^2 + 40x + 25 = 81$$
$$25x^2 - 14x + 25 = 0$$

解の公式を使って，二次方程式を解く。

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\times25\times25}}{2\times25}=\frac{14\pm\sqrt{196-2500}}{50}=\frac{14\pm\sqrt{-2304}}{50}$$

この結果は虚数解(または実数ではない複素数)を含むため，現実の座標平面上では交点が存在しないことがわかる。
よって直線 AB と円 C は交点を持たない，つまり接しない。 ■

（4）三角形 ABC の面積を求めよ。
（解答例）
底辺は AB の距離となる。AB の距離は公式から求める。
AB の距離：$\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{25}=5$

高さは直線 AB と点 C の距離となる。点と直線の距離に関する公式を用いて距離を求める。
(1) で求めた直線 AB を変形すると以下となる

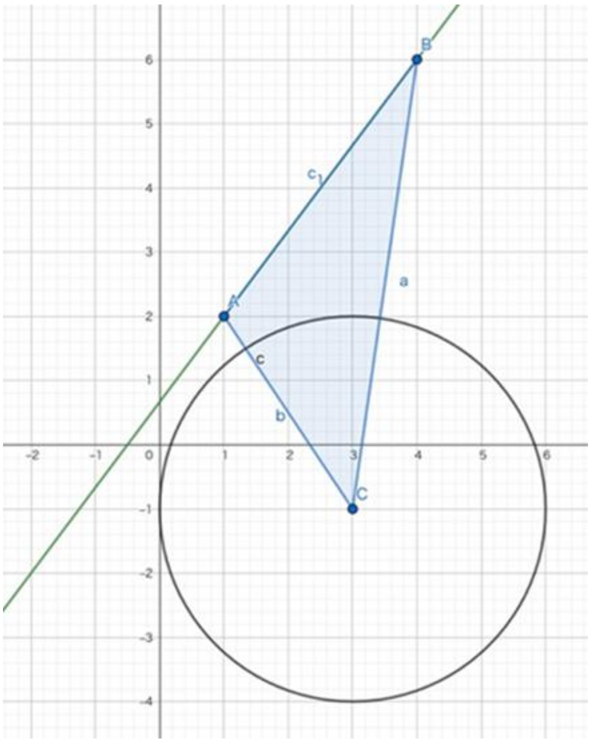
$\frac{4}{3}x-y+\frac{2}{3}=0$ （もしくは $4x-3y+2=0$ ）

点 C（3，－1）と上記の変形した直線 AB を点と直線の距離公式に入れる。

$$\frac{\left|\frac{4}{3}\times3-(-1)+\frac{2}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{17}{5}$$ （もしくは $\frac{|4\times3-3\times(-1)+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{17}{5}$ ）

よって三角形 ABC の面積を S_{ABC} としたとき， S_{ABC} は以下となる。

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{17}{5}\times5=\frac{17}{2}$ ■



（5）円 C の円周上を移動する点 C’を考える。三角形 ABC’で最も大きい面積になるときの C’の座標とその面積，最も小さい面積になるときの C’の座標とその面積を求めよ。

（解答例）

三角形 ABC’の最大となる面積と C’の座標，最小となる面積と C’の座標は，底辺が一緒なので，高さが最大もしくは最小となる円周上の点 C’をそれぞれ探せばよい。

それらの点は，点 C を通る AB の垂線を書き，その垂線と円 C のそれぞれの交点である。
垂線は直交となる線のことであるため，その傾きは

$$\left(\text{垂線の傾き}\right) \times \left(\text{AB の傾き}\right) = -1$$

$$\text{垂線の傾き} = -1 \div \text{AB の傾き} = -1 \div \frac{4}{3} = -\frac{3}{4}$$

点 C(3，−1）を通る AB の垂線の方程式は

$$y-(-1) = -\frac{3}{4}(x-3)$$

よって

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

この式と円 C の交点を求める。以下の方程式を解く。

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

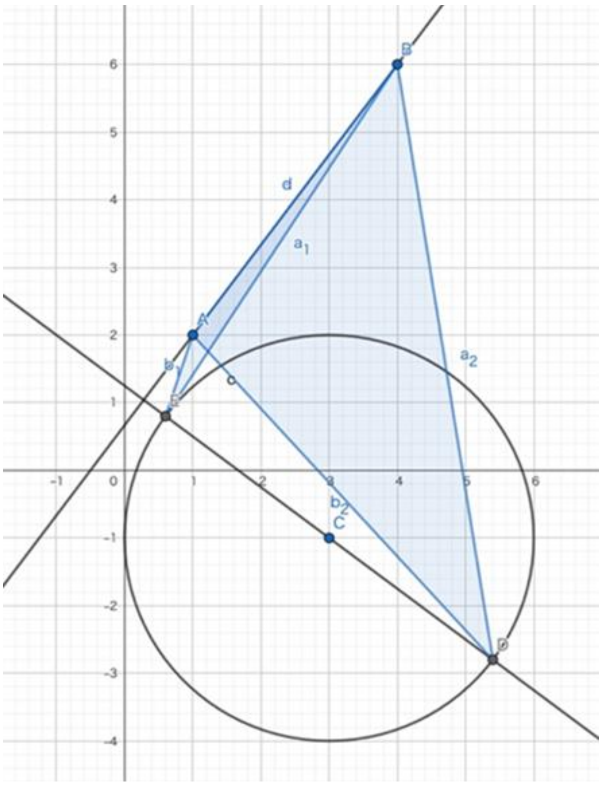
$(x,\ y) = (\frac{27}{5}\ ,\ -\frac{14}{5})$ および $(\frac{3}{5}\ ,\ \frac{4}{5})$

三角形 AB C’の面積が最大になる点 C’は$(\frac{27}{5}\ ,\ -\frac{14}{5})$，最小となる点 C’は $(\frac{3}{5}\ ,\ \frac{4}{5})$ である。■

三角形 AB C’の面積は底辺 5 に高さをかけて，$\frac{1}{2}$を乗じる。
(4)で求めた高さ$\frac{17}{5}$に半径 3 を足したのが最大の高さとなり，高さ$\frac{17}{5}$に半径 3 を減じたのが最小の高さとなる。

最大の高さ：$\frac{17}{5} + 3 = \frac{32}{5}$
最小の高さ：$\frac{17}{5} - 3 = \frac{2}{5}$

よって，
三角形 AB C’の最大面積：$\frac{1}{2} \times \frac{32}{5} \times 5 = 16$ ■
三角形 AB C’の最大面積: $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times 5 = 1$ ■



$\boxed{2}$

直交する x 軸，y 軸で構成される座標平面上において，$x=t$ の点で共通の接線をもつ２つの曲線 $y=2\log_e x$ と $y=\dfrac{x^2}{a}$ （a ：定数）について次の問いに答えよ。

（1）点 t における $y=2\log_e x$ の接線の方程式を求めよ。

（解答例）

点 t における $y=2\log_e x$ の接線の方程式は，$y=f(x)=2\log_e x$ とすると

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ より

$$y=\frac{2}{t}x+2(\log_e t-1) \quad ■$$

（2）t および定数 a の値を求めよ。

（解答例）

2 曲線が $x=t$ にて接しているので,

$$2\log_e t=\frac{t^2}{a}$$

両辺を t で微分して $\dfrac{2}{t}=\dfrac{2t}{a}$

$\dfrac{t^2}{a}=1$ 　より　$2\log_e t=1$

$t=\sqrt{e}$ 　ゆえに　$a=e$ 　■

（3）この 2 つの曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

（解答例）

2 つの曲線の接点は $(\sqrt{e},1)$ であるから，求める面積を S とすると,

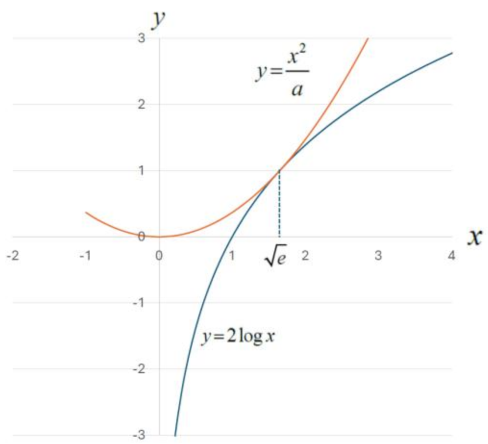
S は x 軸と $y=\dfrac{x^2}{a}$ の $0<x<\sqrt{e}$ の範囲で囲まれる面積 S_1 から

x 軸と $y=2\log_e x$ の $1<x<\sqrt{e}$ の範囲で囲まれる面積 S_2 を引いたものであるので,

$$S=S_1-S_2=\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{e}dx-\int_1^{\sqrt{e}}2\log_e x dx$$

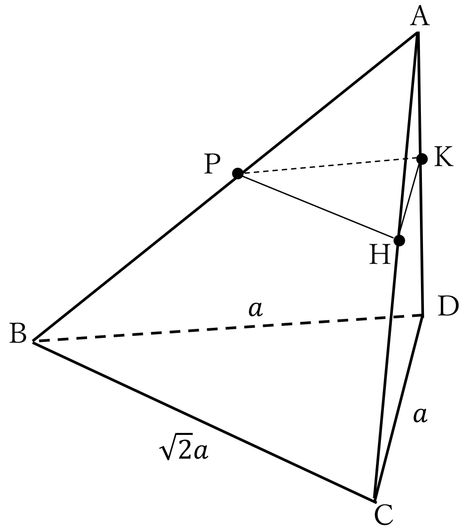
$$=\left[\frac{x^3}{3e}\right]_0^{\sqrt{e}}-2\left[x\log_e x-x\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\frac{4\sqrt{e}}{3}-2 \quad ■$$



3

図のように，三角錐 ABCD において，AD⊥CD，AD⊥BD，AD＝BD＝CD＝a，BC＝$\sqrt{2}a$である．点 A から$\frac{1}{3}a$の距離にある AD 上の点 K を通り，三角形 BCD に平行な平面 PHK で三角錐 ABCD を切断した。このとき次の問いに答えよ。



（1）　三角錐 ABCD の体積が Vのとき，三角錐 APHK の体積を，Vを用いて示せ。

（解答例）

三角錐 ABCD と三角錐 AKPH は相似形（三角形 BCD に平行な平面 KPH で三角錐 ABCD を切断したため.）であり，相似比が 3：1 なので，体積比は $3^3：1^3＝27：1$　よって，

三角錐 AKPH の体積＝$\left(\frac{1}{3}\right)^3 V=\frac{1}{27}V$

（2）　三角錐 ABCD の体積が Vのとき，三角錐 KBCD の体積を，Vを用いて示せ。

（解答例）

AD⊥CD，AD⊥BD より，KD は面 BCD と垂直に交わる．よって　三角錐 KBCD において，三角形 BCD を底面とすると KD は高さとなる．BD＝CD＝a，BC＝$\sqrt{2}a$より，BD：CD：BC＝1：1：$\sqrt{2}$となり三角形 BCD は直角二等辺三角形であり，三角形 BCD の面積＝$\frac{1}{2}a^2$である．三角錐 ABCD と三角錐 KBCD の底面は共通の三角形 BCD である。また，三角錐 KBCD の高さ KD＝$\frac{2}{3}a$である（KD＝AD－AK=$a-\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a$）．

三角錐 ABCD の体積$V=\frac{1}{3}\times$三角形 BCD の面積×高さ AD＝$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}a^2\right)\times a=\frac{1}{6}a^3$

三角錐 KBCD の体積＝$\frac{1}{3}\times$三角形 BCD の面積×高さ KD＝$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}a^2\right)\times\frac{2}{3}a=\frac{1}{9}a^3$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}a^3=\frac{2}{3}V$

※底面は共通なので高さの比が体積比となることで三角錐 KBCD の体積を計算しても良い。

（3）五面体 KPBCH の体積を，aを用いて示せ。

（解答例）

BD＝CD＝a，BC＝$\sqrt{2}a$の関係から三角形 BCD は直角二等辺三角形である。

三角形 BCD の面積＝$\frac{1}{2}a^2$

三角錐 ABCD の体積V＝$\frac{1}{3}$×三角形 BCD の面積×高さ AD＝$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}a^2\right)\times a=\frac{1}{6}a^3$

五面体 KPHBC の体積＝三角錐 ABCD の体積$V-$三角錐 AKPH の体積$-$三角錐 KBCD

$$=V-\frac{1}{27}V-\frac{2}{3}V=\frac{8}{27}V=\frac{4}{81}a^3$$