三条市立大学　令和７年度
工学部　技術・経営工学科
一般選抜　中期日程

個別学力検査

数学　解答編

令和７年３月８日　　10 時～12 時（120 分）

$\boxed{1}$

次の方程式で表される円 X ：$x^2-4x+y^2-6y+9=0$ に関して，次の問いに答えよ。

（1） 円 X の中心と半径を求めよ。

（解答例）

円 X の方程式を標準形に変形する。

$$x^2-4x+y^2-6y+9=0$$

$$(x-2)^2-4+(y-3)^2-9+9=0$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4=2^2$$

よって円 X の中心は（2, 3)，半径は 2 である。■

（2）点 A（−1, 1）から円 X に引いた接線のうち，傾きが小さい接線の傾きを求めよ。

（解答例）

点 A(−1, 1)から円 X に接する 2 種類の接線の一つはx軸に平行（傾きは 0）であり，もう一つの接線は傾きが正である。そのため，傾きが小さい接線の傾きは 0 である。■

（3）傾きが小さい接線を m，他の接線を n としたとき，それぞれ接線と円 X との接点を点 B および C とする。このとき，接線 m と接線 n の方程式と，接点 B および C の座標を求めよ。

（解答例）

接線 m の方程式は$y=1$，円 X の接点 B は（2,1）となる。■

接線 n の方程式を求めるにあたり，まず図形全体を x 軸方向に−2，y 軸方向に −3 平行移動した円 X'：$x^2+y^2=2^2$上の点 P'を接点とした接線の式は以下となる。

$$x_0x+y_0y=2^2 \cdots ①$$

円 X の接点 P を（x_1，y_1）としたとき，接点 P'(x_0，y_0）と接点 P（x_1，y_1）は以下の関係が成り立つ。

$$x_1=x_0+2, \quad y_1=y_0+3$$

この①に上記を代入する。

$$(x_1-2)x+(y_1-3)y=2^2 \quad \cdots ②$$

この②を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 平行移動させる(元に戻す)と，円 X の接線が求められる（円 X の（x_1，y_1）を接点とした接線の式となる)。

$$(x_1-2)(x-2)+(y_1-3)(y-3)=2^2$$

この時，接線 n は点 A（−1, 1）を通ることから，以下に変形できる。

$$(x_1-2)(-1-2)+(y_1-3)(1-3)=2^2$$

$$(x_1-2)(-1-2)+(y_1-3)(1-3)=2^2$$

$$3x_1+2y_1=8 \quad \cdots ③$$

また接点 C は円 X 上の点であることから，以下④を満たす。

$$x_1{}^2-4x_1+y_1{}^2-6y_1+9=0 \quad \cdots ④$$

③および④の方程式を解くと，接点（x_1，y_1）はそれぞれ接点 B (2,1) と

接点 C $\left(\frac{2}{13},\frac{49}{13}\right)$ が得られる。■

接点 C$\left(\frac{2}{13},\frac{49}{13}\right)$ と点 A（−1, 1）の直線の式をもとめると，接線 n の方程式となる。

$$y=\frac{12}{5}x+\frac{17}{5} \quad ■$$

（4）点 A と (3) で求めた接点 B，C を結んだ三角形 ABC の面積を求めよ。

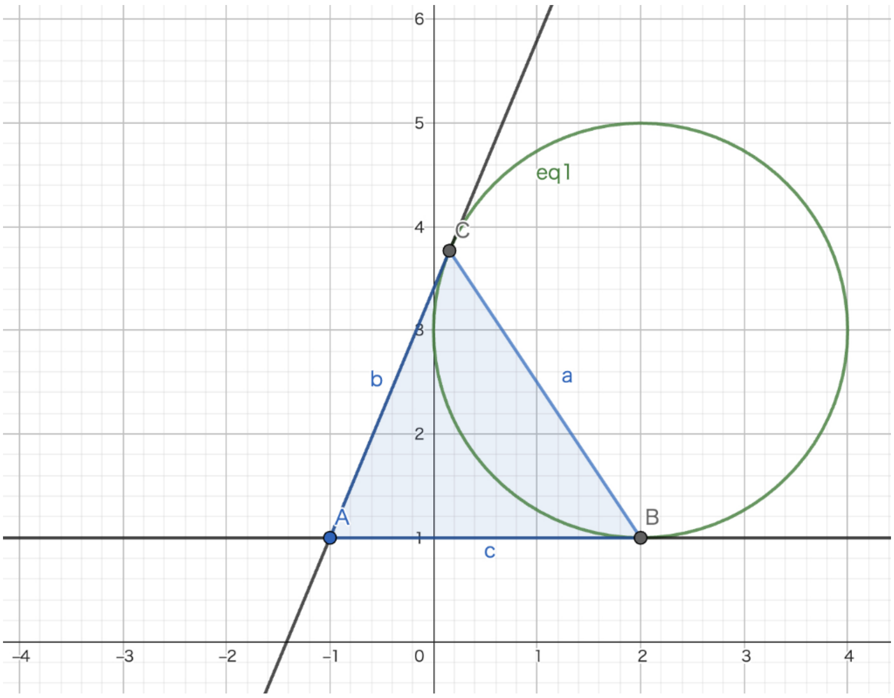
（解答例）

三角形 ABC の面積は，底辺を AB，接点 C から AB までの距離を高さとして求める。

AB の距離（底辺）は 3，高さ（接点 C から AB までの距離）は $\frac{36}{13}$ である。

よって，三角形 ABC の面積は以下となる。

$$\frac{1}{2}\times 3\times\frac{36}{13}=\frac{54}{13} \quad ■$$



(5) (3)で求めた接線 n の垂線が点 B を通るとき，この垂線と接線 n の交点を D と置く。
このとき，三角形 ABC の面積は三角形 ABD の面積の何倍か求めよ。

（解答例）

接線 n の垂線の式を求め，交点 D を得て三角形 ABD の面積を求める。

点 B を通る垂線の方程式： $y = -\frac{5}{12}x + \frac{11}{6}$

接線 n と垂線の交点 D の座標：$\left(-\frac{94}{169}, \frac{349}{169}\right)$

AD の距離：計算を経て $\frac{195}{169} = \frac{15}{13}$

DB の距離：計算を経て $\frac{36}{13}$

三角形 ABD の面積： $\frac{15}{13} \times \frac{36}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{270}{169}$

(4)で求めた三角形 ABC の面積は $\frac{54}{13}$

三角形 ABC の面積：三角形 ABD の面積 $= \frac{54}{13} : \frac{270}{169} = 13 : 5$

よって三角形 ABC の面積は三角形 ABD の $\frac{13}{5}$ 倍となる。 ■

$\boxed{2}$

（1）直交する x 軸，y 軸で構成される座標平面上において，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{81}=1$ の上の点

$(3\cos\theta,\ 9\sin\theta)\quad (0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ における接線の方程式を求めよ。

（解答例）

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{81}=1$ の両辺を x で微分すると $\dfrac{2}{9}x+\dfrac{2}{81}y\dfrac{dy}{dx}=0$

よって $y\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{81x}{9y}$

$y\neq 0$ のとき，点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$y-y_0=-\frac{81x_0}{9y_0}(x-x_0)$$

$\dfrac{{x_0}^2}{9}+\dfrac{{y_0}^2}{81}=1$ より，上式を整理すると、

与えられた楕円上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線は

$$\frac{x_0}{9}x+\frac{y_0}{81}y=1$$

と表せるので，求める接線は

$$\frac{\cos\theta}{3}x+\frac{\sin\theta}{9}y=1 \qquad ■$$

（2）（1）の接線と x 軸，y 軸が交わる点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ の長さを求めよ。

（解答例）

$\mathrm{P}(p,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ q)$ とおくと，

$p=\dfrac{3}{\cos\theta}$ ， $q=\dfrac{9}{\sin\theta}$ となるので

$$\mathrm{PQ}^2=p^2+q^2=\frac{9}{\cos^2\theta}+\frac{81}{\sin^2\theta}$$

$\mathrm{PQ}>0$ より

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\frac{9}{\cos^2\theta}+\frac{81}{\sin^2\theta}} \qquad ■$$

(3)(2)の長さの最小値を求めよ。

(解答例)

PQ^2 が最小になるときの θ を求める。

$f(\theta)=\dfrac{9}{\cos^2\theta}+\dfrac{81}{\sin^2\theta}$ とおくと,

$$\frac{d\,f(\theta)}{d\theta}=\frac{18\sin\theta}{\cos^3\theta}-\frac{162\cos\theta}{\sin^3\theta}=\left(\frac{18\cos\theta}{\sin^3\theta}\right)\left(\tan^4\theta-9\right)$$

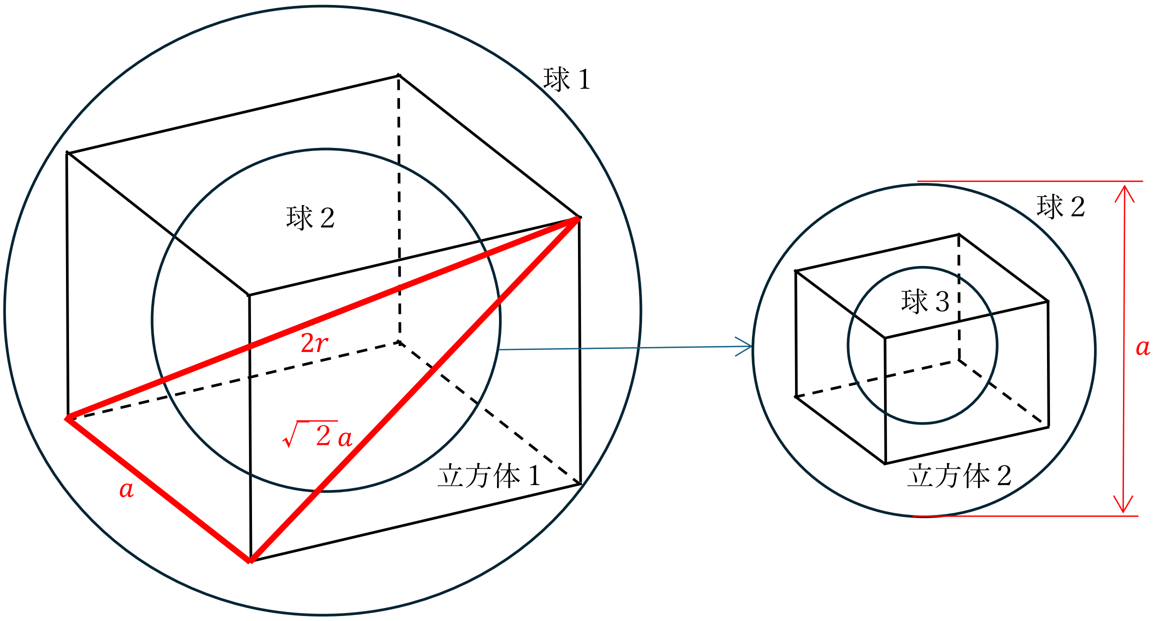
であるから, $f(\theta)$ が最小になるのは $\dfrac{d\,f(\theta)}{d\theta}=0$ の点より

$\tan\theta=\sqrt{3},\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$ のときである。

従って PQ の最小値は $\sqrt{\dfrac{9}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}+\dfrac{81}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}}=\sqrt{\dfrac{9}{\left(\dfrac{1}{4}\right)}+\dfrac{81}{\left(\dfrac{3}{4}\right)}}=12$ ■

$\boxed{3}$

図のように，半径rの球１に一辺が長さaの立方体１が内接している。その立方体１に球２が内接している。さらに，球２に立方体２が内接している。この関係が繰り返され，球と立方体は内接しながら小さくなり続けているものとする。このとき次の問いに答えよ。円周率はπを使用せよ。



（１） 立方体１の一辺の長さaを，球１の半径rを用いて示せ。

（解答例）

三平方の定理から　$a^2 +(\sqrt{a^2+a^2})^2 = (2r)^2$

$$a^2+2a^2 = 4r^2,\quad よってa=\sqrt{\frac{4}{3}}r=\frac{2}{\sqrt{3}}r=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

（２） 球２の体積を，球１の半径rを用いて示せ。

（解答例）

球２の半径$=a\div 2=\sqrt{\frac{1}{3}}r=\frac{\sqrt{3}}{3}r$である。

よって，球２の体積$=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{1}{3}}r\right)^3=\frac{4}{9\sqrt{3}}\pi r^3=\frac{4}{27}\sqrt{3}\pi r^3$

（３） n 番目の球 n の体積を，球 1 の半径rを用いて示せ。ただし， n は正の整数とする。

（解答例）

球 n の半径＝ $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{n-1} r$である。

よって，球 n の体積＝ $\frac{4}{3}\pi\left[\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{n-1} r\right]^3$

$$= \left[\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{3(n-1)}\right]\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{3(n-1)}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{3^3}\right)^{(n-1)}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{(n-1)}\pi r^3$$

（４）すべての球の体積の総和を，球 1 の半径rを用いて示せ。

（解答例）

ここで計算を容易にするために， $\frac{4}{3}\pi r^3 = V$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ＝A とおく。

すべての球の体積の総和 $X = V(1 + A^3 + A^6 + A^9 + A^{12} + \cdot\cdot\cdot\cdot)$ ①

式①の両辺にA^3を掛けると，$A^3X = V(A^3 + A^6 + A^9 + A^{12} + \cdot\cdot\cdot\cdot)$ ②

式①－式②は，$(1 - A^3)X = V$，よって

$$X = \frac{1}{(1-A^3)}V = \frac{1}{\left[1-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3\right]}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{9}}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{9}}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{9}}\pi r^3 = \frac{4}{3}\frac{9}{9-\sqrt{3}}\pi r^3 = \frac{4}{3}\frac{9(9+\sqrt{3})}{(9-\sqrt{3})(9+\sqrt{3})}\pi r^3$$

$$= 4\frac{3(9+\sqrt{3})}{81-3}\pi r^3 = \frac{6(9+\sqrt{3})}{39}\pi r^3$$