

三条市立大学 令和 8 年度
工学部 技術・経営工学科
一般選抜 前期日程

個別学力検査

数学 解答例

令和 8 年 2 月 25 日 10 時～11 時 30 分 (90 分)

(余白)

(余白)

1

三角形ABCにおいて、辺 $AB = 6$ 、 $AC = 5$ 、 $\angle BAC = \theta$ とする($0^\circ < \theta < 180^\circ$)。点Dは辺BC上にあり、 $BD:DC = 1:2$ を満たす。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = 60^\circ$ のとき、余弦定理を用いて辺 BC の長さを求めよ。

(解答例)

余弦定理より、

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$= 36 + 25 - 60 \cdot \frac{1}{2} = 31$$

$$\text{したがって } BC = \sqrt{31} \quad \blacksquare$$

(2) $\theta = 60^\circ$ のとき、三角形ABCの面積を求めよ。

(解答例)

$$\text{面積 } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

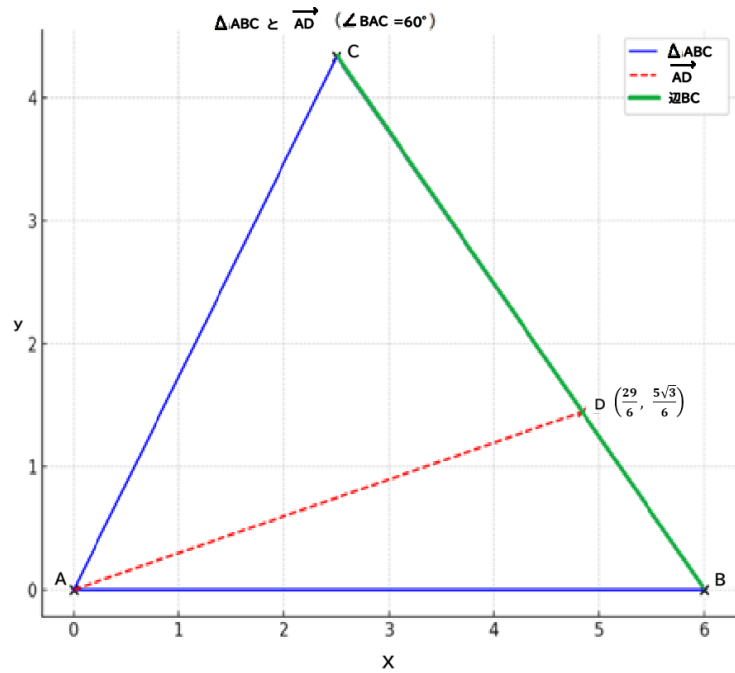
$$\text{したがって } S = \frac{15\sqrt{3}}{2} \quad \blacksquare$$

(3) $\theta = 60^\circ$ のとき、点Dが辺BC上にあり、 $BD:DC = 1:2$ を満たすとき、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて $\overrightarrow{AD}$ を表せ。

(解答例)

点Aを原点 $(0,0)$ 、点Bを $(6,0)$ 、点Cを $(5\cos 60^\circ, 5\sin 60^\circ) = (\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ とする。D は BC を $1:2$ に内分するので、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \quad \blacksquare$$



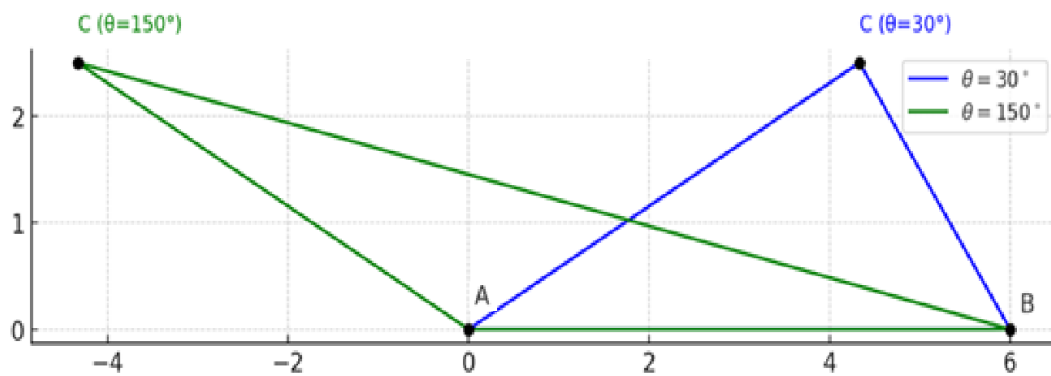
(4) $\angle BAC = \theta$ のとき, 三角形ABCの面積が $\frac{15}{2}$ となるような θ の値を求めよ。

(解答例)

$$\text{面積 } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin \theta = 15 \sin \theta$$

$$S = \frac{15}{2} \text{ なので, } 15 \sin \theta = \frac{15}{2} \text{ よって } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

したがって, $\theta = 30^\circ, 150^\circ$ ■



(三角形 ABC において面積が $15/2$ となる 2つの角度 $\theta = 30^\circ$ (青) および 150° (緑) の場合の構図を表す)

2

m も n も正の整数とし、また $0^0 = 1$ とする。 以下のように定義された関数 $f_m(x)$ について、次の問いに答えよ。

$$f_m(x) = \int_0^m e^{-t} t^{x-1} dt$$

このとき、 $\lim_{m \rightarrow \infty} m^n e^{-m} = 0$ を使ってよい。

(1) $f_m(1)$, $f_m(2)$, $f_m(3)$ のそれぞれの値を m で表せ。

(解答例)

$$f_m(1) = \int_0^m e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^m = 1 - e^{-m}$$

これを使って

$$f_m(2) = \int_0^m e^{-t} t dt = [-t e^{-t}]_0^m + \int_0^m e^{-t} dt = 1 - m e^{-m} - e^{-m}$$

同様にして

$$f_m(3) = \int_0^m e^{-t} t^2 dt = [-t^2 e^{-t}]_0^m + 2 \int_0^m e^{-t} t dt = 2 - m^2 e^{-m} - 2m e^{-m} - 2e^{-m}$$

(2) 極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(1)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(2)$, $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(3)$ をそれぞれ求めよ。

(解答例)

(1)より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - e^{-m}) = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(2) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - m e^{-m} - e^{-m}) = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(3) = \lim_{m \rightarrow \infty} (2 - m^2 e^{-m} - 2m e^{-m} - 2e^{-m}) = 2$$

(3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} fm(n)$ を n で表して, それを数学的帰納法によって証明せよ。

(解答例)

$$(2) \text{より} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} fm(n) = (n-1)!$$

と予想してこれを数学的帰納法によって証明する。

まず, $n=1$ のときは成立している. そこで $n=k$ のときを仮定する, i.e.,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} fm(k) = (k-1)!$$

次に $n=k+1$ のときは

$$fm(k+1) = \int_0^m e^{-t} t^k dt = [-t^k e^{-t}]_0^m + k \int_0^m e^{-t} t^{k-1} dt = -m^k e^{-m} + k fm(k)$$

したがって

$$\lim_{m \rightarrow \infty} fm(k+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} (-m^k e^{-m} + k fm(k)) = 0 + k(k-1)! = k!$$

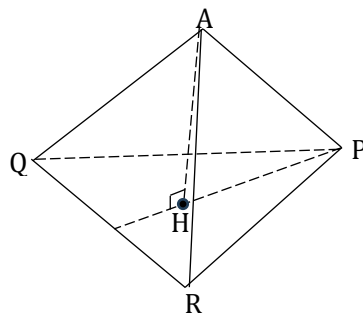
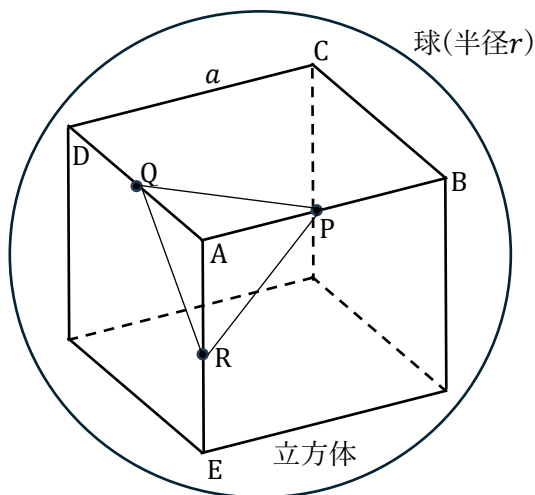
ゆえに, すべての正の整数 n について

$$\lim_{m \rightarrow \infty} fm(n) = (n-1)!$$

が成立する。

3

図のように、半径 r の球に一辺が長さ a の立方体が内接している。辺 AB の中点を P 、辺 AD の中点を Q 、辺 AE の中点を R とする。また、三角錐 $APQR$ において、頂点 A から三角形 PQR に垂線 AH を下ろす。このとき次の問いに答えよ。



(1) 三角錐 $APQR$ の体積を、球1の半径 r を用いて示せ。

(解答例)

まず、 a を球1の半径 r を用いて表す。

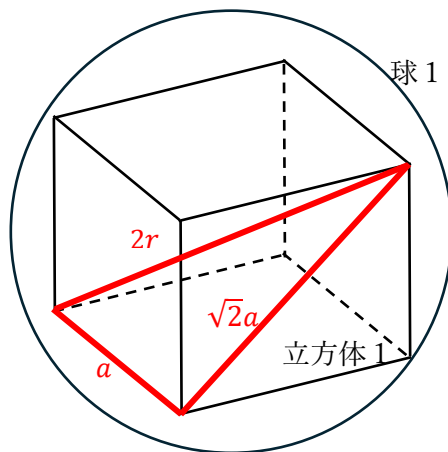
三平方の定理から $4r^2 = a^2 + 2a^2$, よって $a = \frac{2}{\sqrt{3}}r$

三角錐 $APQR$ の体積 $= \frac{1}{3} \times \triangle APQ \text{の面積} \times AR$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{8}a^2 \times \frac{1}{2}a$$

$$= \frac{1}{48}a^3$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}r \text{なので} \quad = \frac{1}{48} \times \frac{8}{3\sqrt{3}}r^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}r^3$$



(2) 三角錐 APQR の表面積を、球 1 の半径 r を用いて示せ。

(解答例)

$$AP = AQ = AR = \frac{1}{2}a, \quad PQ = QR = PR = \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

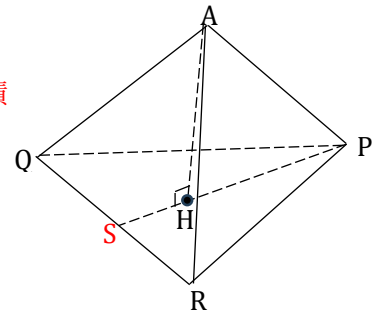
三角錐 APQR の表面積 = $3 \times \triangle AQR$ の面積 + $\triangle PQR$ の面積

$$= 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}a \times \frac{1}{2\sqrt{2}}a \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}a \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a \right)$$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{8}a^2 \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{8}a^2 \right) = \frac{3 + \sqrt{3}}{8}a^2$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}r \text{ なので,}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{8} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}r \right)^2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}r^2$$



(3) 辺 AH の長さを、球 1 の半径 r を用いて示せ。

(解答例)

$$(1) \text{より, 三角錐 APQR の体積} = \frac{\sqrt{3}}{54}r^3$$

$$(2) \text{より, } \triangle PQR \text{ の面積} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}r^2$$

$$\text{三角錐 APQR の体積} = \frac{1}{3} \times \triangle PQR \text{ の面積} \times AH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6}r^2 \times AH = \frac{\sqrt{3}}{54}r^3$$

よって,

$$AH = \frac{1}{3}r$$

(別解)

P 点から辺 QR に垂線を引き、交点を S とする。

$\triangle PQR$ は正三角形で、点 H はその重心

であり、点 H は線分 PS を 2:1 に内分する点である。

$$\text{よって, } PH = \frac{2}{3}PS = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

直角三角形 APH の 3 辺の関係は、三平方の定理より、 $AP^2 = AH^2 + PH^2$

$$\left(\frac{1}{2}a \right)^2 = AH^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a \right)^2$$

$$AH^2 = \left(\frac{1}{2}a \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a \right)^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{6}a^2 = \frac{3}{12}a^2 - \frac{2}{12}a^2 = \frac{1}{12}a^2$$

$$AH = \frac{1}{2\sqrt{3}}a$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}r \text{ なので,}$$

$$\text{よって, } AH = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}}r = \frac{1}{3}r$$

(余白)

