

三条市立大学 令和8年度
工学部 技術・経営工学科
一般選抜 中期日程

個別学力検査

数学 解答例

令和8年3月8日 10時～11時30分（90分）

(余 白)

(余 白)

1

関数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ と直線 $y = kx - 6$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ のグラフと直線 $y = kx - 6$ がちょうど 1 点で接するような実数 k の値をすべて求めよ。

(解答例)

関数と直線が接するとは、 $f(x) = kx - 6$ の方程式が重解を持つことである。

$$\text{すなわち、} x^2 - 4x + 3 = kx - 6$$

$$\text{よって } x^2 - (4+k)x + 9 = 0$$

この方程式が重解をもつ条件は判別式 $D = 0$ となる。

$$D = (4+k)^2 - 36 = 0$$

$$\text{よって } (4+k)^2 = 36$$

$$\text{したがって } k = 2, -10 \quad \blacksquare$$

- (2) (1) で求めた k に対し、接点の座標と接線を求めよ。ただし $k > 0$ とする。

(解答例)

$k > 0$ より $k = 2$ を採用する。

$$x^2 - 4x + 3 = 2x - 6$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$\text{よって } x = 3$$

$$\text{したがって、接点は } (3, 0), \text{ 接線の式 } y = 2x - 6 \quad \blacksquare$$

- (3) 関数 $f(x)$ のグラフと(2)で求めた接線および直線 $x=1$ との間で囲まれる図形の面積を求めよ。

(解答例)

領域は $x=1$ から接点 $x=3$ の区間である。関数と接線間の面積 S は、積分により求める。

$$\begin{aligned}\text{面積 } S &= \int_1^3 \{f(x) - (2x - 6)\} dx \\ &= \int_1^3 \{x^2 - 6x + 9\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{27}{3} - 27 + 27 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 9 \right) \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

したがって、 $S = \frac{8}{3}$ ■

- (4) 関数 $f(x)$ のグラフと(2)で求めた接線、直線 $x=5$ によって囲まれる部分の面積と、(3)で求めた面積を比較し、どちらが大きいか理由とともに述べよ。

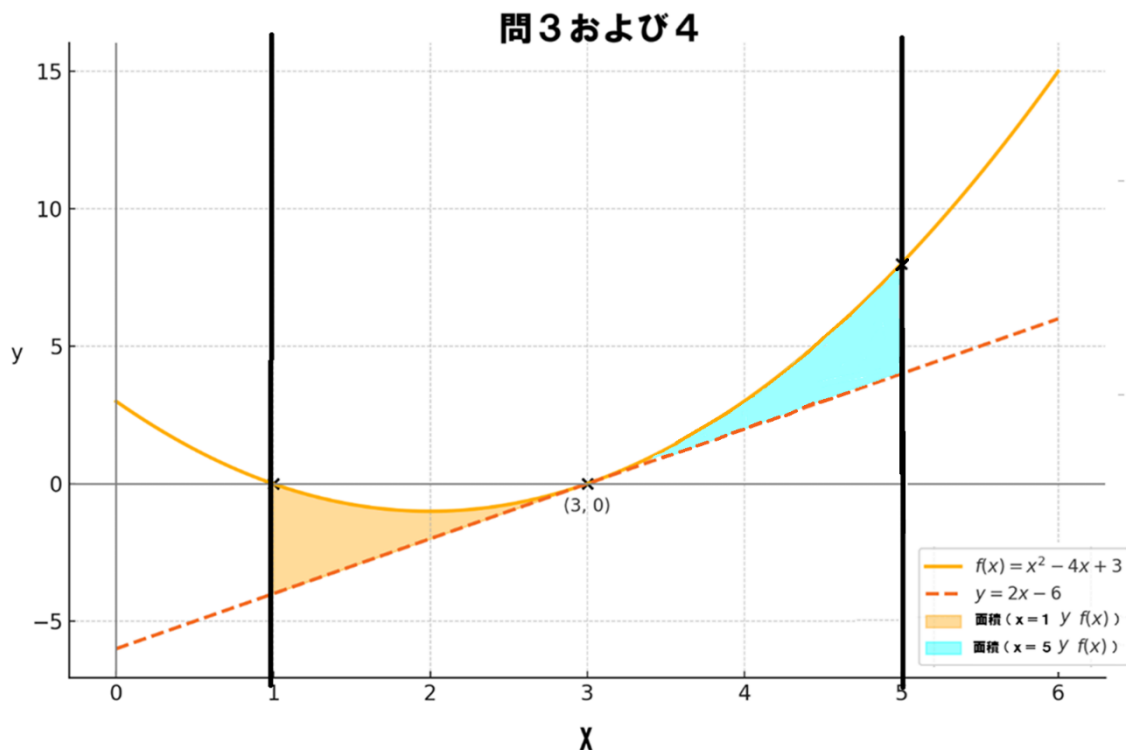
(解答例)

領域は接点 $x=3$ から $x=5$ の区間である。面積 S' も(3)と同様、積分で求める。

$$\begin{aligned}\text{面積 } S' &= \int_3^5 \{f(x) - (2x - 6)\} dx \\ &= \int_3^5 \{x^2 - 6x + 9\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_3^5 \\ &= \left(\frac{125}{3} - 75 + 45 \right) - \left(\frac{27}{3} - 27 + 27 \right) \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

よって $S' = \frac{8}{3}$

したがって(3)および(4)の面積はいずれも $\frac{8}{3}$ で等しい。これは関数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ は接点 $x=3$ を軸とする。接線がその点において交わるため、 $x=1$ から $x=3$ 、 $x=3$ から $x=5$ までの囲まれる面積が等しくなる。



(上記オレンジと水色の面積は、関数の対称性からも一致する)

2

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $\sqrt{x^2+3}$ を微分せよ。

(解答例)

$$\left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

(2) 関数 $\log_e(x + \sqrt{x^2+3})$ を微分せよ。

(解答例)

(1) を使って

$$\begin{aligned} \left(\log_e(x + \sqrt{x^2+3})\right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+3}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+3}} \frac{\sqrt{x^2+3} + x}{\sqrt{x^2+3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \end{aligned}$$

(3) 定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$ の値を求めよ。

(解答例)

(2) より, 関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ の原始関数が $\log_e(x + \sqrt{x^2+3})$ なので

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = [\log_e(x + \sqrt{x^2+3})]_0^1 = \log_e \frac{1 + \sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \log_e \sqrt{3}$$

(4) a を正数とすると、方程式

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \log_e(2\sqrt{3}a)$$

を満たす解 a を求めよ。

(解答例)

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = [\log_e(x + \sqrt{x^2+3})]_0^a = \log_e \frac{a + \sqrt{a^2+3}}{\sqrt{3}}$$

となるから、方程式は

$$\log_e \frac{a + \sqrt{a^2+3}}{\sqrt{3}} = \log_e(2\sqrt{3}a)$$

したがって

$$\frac{a + \sqrt{a^2+3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}a \iff a + \sqrt{a^2+3} = 6a \iff \sqrt{a^2+3} = 5a$$

両辺を2乗して

$$a^2 + 3 = 25a^2 \iff a^2 = \frac{1}{8}$$

ゆえに

$$a = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

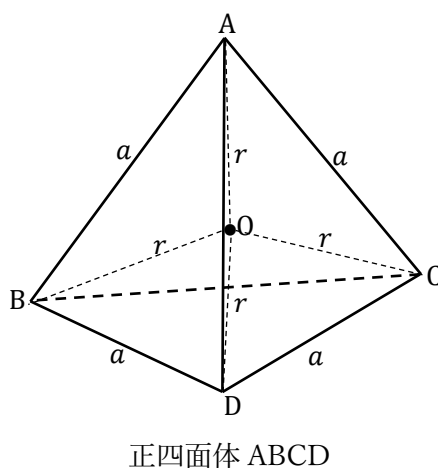
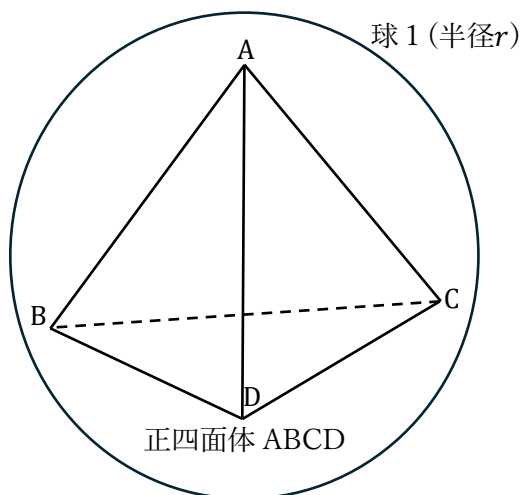
この値は確かに

$$\frac{a + \sqrt{a^2+3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}a$$

を満たしているので、求める解である。

3

図1のように、半径 r の球1に一辺が長さ a の正四面体ABCDが内接している。点Oは球1の中心である。このとき次の問いに答えよ。



(1) 正四面体ABCDの一辺の長さ a を、球1の半径 r を用いて示せ。

(解答例)

$\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$ ($\because$ 直角三角形で、斜辺が等しく、長さが a であり、他の一辺AHが共通) のことから、Hは正三角形BCDの外心(各辺の垂直二等分線の交点)かつ内心(角の二等分線の交点)かつ重心(中線の交点)である。

$\triangle ACH$ について

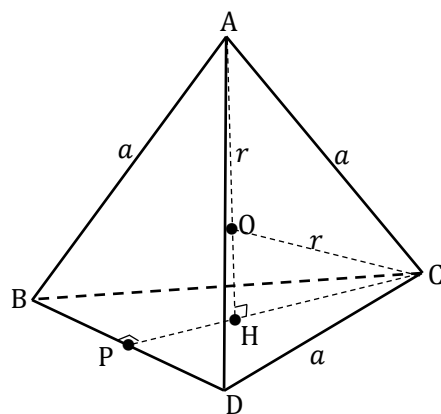
$$CH = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3} \times \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{9}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\text{よって、} OH = AH - r = \frac{\sqrt{6}}{3}a - r$$

つぎに、 $\triangle CHO$ について、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} CO^2 &= OH^2 + CH^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \frac{6}{9}a^2 - 2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}ar + r^2 + \frac{3}{9}a^2 \\ &= a^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}ar + r^2 = r^2 \end{aligned}$$



これを整理すると,

$$a^2 = \frac{2\sqrt{6}}{3} ar$$

$$a = \frac{2\sqrt{6}}{3} r \quad \text{となる}$$

(2) 正四面体 ABCD の表面積を, 球 1 の半径 r を用いて示せ。

(解答例)

$$\text{正四面体 ABCD の表面積} = 4 \times \triangle ABD \text{ の面積} = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) = \sqrt{3} a^2$$

$$a = \frac{2\sqrt{6}}{3} r \quad \text{なので,} \quad = \sqrt{3} \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} r \right)^2 = \sqrt{3} \times \frac{4 \times 6}{9} r^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3} r^2$$

(3) 正四面体 ABCD の体積を, 球 1 の半径 r を用いて示せ。

(解答例)

$\triangle BCD$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot CP = \frac{1}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\text{よって, } S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

正四面体 1 の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} S \cdot AH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$$a = \frac{2\sqrt{6}}{3} r \quad \text{なので,}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} r \right)^3 = \frac{\sqrt{2} \times 8 \times 6\sqrt{6}}{12 \times 27} r^3 = \frac{8\sqrt{3}}{27} r^3$$

(余 白)

